Lycée secondaire Bach Hamba	Classe : 4ème sciences experimentales$_1$	
Prof: Mme Bayoudh	Date :07/11/2012	Durée : 2 heures

Devoir de contrôle n °1 en mathématiques

Q.C.M : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes ,une seule réponse est correcte .(Aucune justification n'est demandée)

1) Soit la fonction : $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ n'existe pas

b/ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $+\infty$

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n=n.\cos(\dfrac{\pi}{n})$

☐ (u_n) est convergente ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ☐ (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$

3) Dans le plan complexe muni d'un rpère orthonormé direct ,
on donne les points A,B et C d'affixes respectives $Z_A=2-i$, $Z_B=2+i$ et $Z_C=-2+i$,
alors l'ensemble des points M du plan d'affixe Z vérifiant $\left|\overline{Z}-2+i\right|=3$ est un cercle de rayon 3 et de centre

☐ A ☐ B ☐ C

Exercice n°1 : (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,4[$ par $f(x)=\dfrac{3}{4-x}$

Soient les suites (U_n) et (V_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}, n\geq0$ et $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}, n\geq0$

Dans l'annexe , on a tracé la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite $\Delta : y = x$

On a placé les termes v_0 , v_1 et v_2 sur l'axe des abscisses.

1) a/ Déduire du graphique les variations de f sur $]-\infty,4[$

b/ Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 et u_2 en utilisant la courbe de f et la droite Δ.

c/ Que peut-on conjecturer sur la convergence de (U_n) et (V_n).

2) a/ Montrer que la suite (U_n) est croissante et que $u_n\leq1$, pour $n\in IN$.

b/ Montrer que la suite (V_n) est décroissante et que $v_n\geq1$, pour $n\in IN$.

c/ En déduire que $u_n\leq v_n$, pour $n\in IN$.

3) a/ Montrer que $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{3(v_n-u_n)}{(4-v_n)(4-u_n)}$

b/ En justifiant que $(4-v_n)(4-u_n)\geq6$, Montrer que $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$

c/ Montrer par récurrence que $v_n-u_n\leq4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

d/ Calculer alors la limite de (v_n-u_n) lorsque n tend vers $(+\infty)$.

Que peut-on dire des suites (U_n) et (V_n) ?

e/ Déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite ℓ que l'on déterminera.

Exercice n°2 : (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $Z_A = \sqrt{3} + i$ et $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A et Z_B.

b) Placer les points A et B dans le repère.

c) Ecrire $\dfrac{Z_B}{Z_A}$ sous forme exponentielle.

d) Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

e) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.

2) Soit un point M d'affixe $Z_M = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que $Z_M = 2\cos\theta\ e^{i\theta}$ puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.

b) Déterminer la valeur de θ pour que M appartient au cercle de centrer O et de rayon 1.

c) Déterminer la valeur de θ pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x^2+1} & si\ \ x \succ 0 \\ x^3+2x+1 & si\ \ x \le 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $0 \le f(x) \le \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

(Indication : Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs)

b) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en 0.

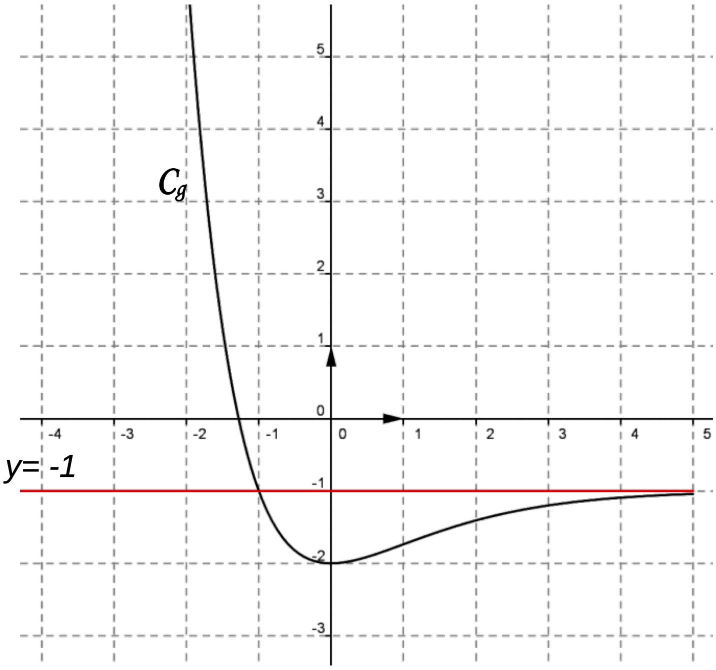
3) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$.

b) Monter que l'équation f(x) =0 admet dans $]-\infty, 0]$ une unique solution α puis vérifier que $-0,5 \le \alpha \le -0,4$.

4) La courbe C_g ci dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur IR.

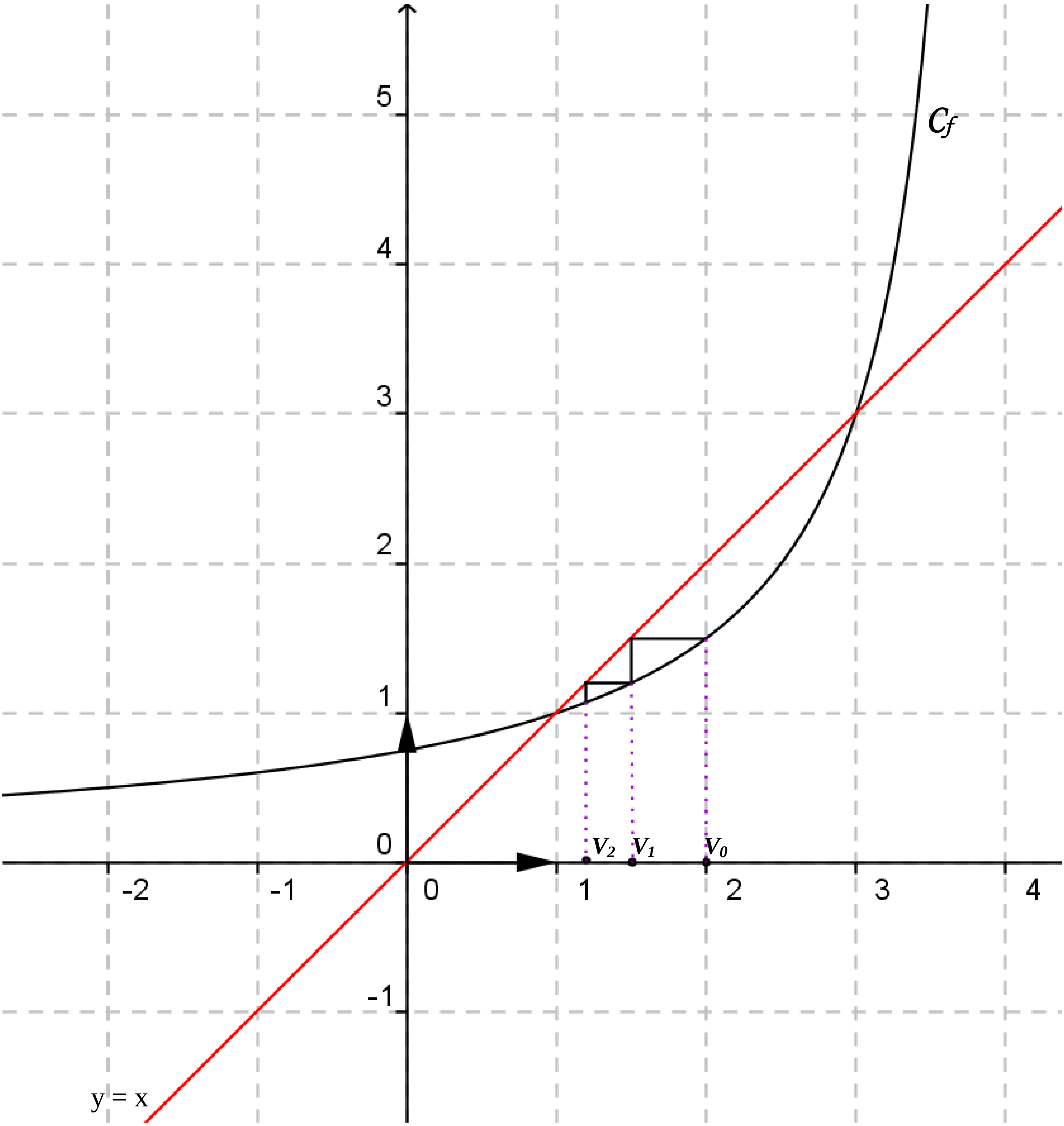
C_g admet la droite D : y =-1 comme asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} gof(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} fog(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} fog(x)$



Annexe

Nom & Prénom : . . . .



Bon travail et bonne chance

Exercice № 01(4.5points)

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1) La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^n$ est convergente
2) Le nombre complexe $a = (\sqrt{3} + i)^{2010}$ est imaginaire pur
3) $\frac{13\pi}{12}$ est un argument du nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$
4) Soit θ un réel. L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 - 3i + e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point $J(-1+3i)$ et de rayon 1
5) Pour tout nombre complexe z , si |1 + i z| = |1 − i z| , alors la partie imaginaire de z est nulle
6) Dans le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$.
   Le triangle OAB est alors rectangle isocèle en O

Exercice № 02(5points)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x}\cos x}{x+2} & si x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1} - 1)} & si x \prec 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0
2) a/ Montrer que pour tout réel positif x on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$
   b/ En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(1 - \sin x)$
4) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ une solution qu'on notera α
   b/ Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice № 03(5points)

1-a/ Vérifier que : $(1+\sqrt{3}+2i)^2 = 2\sqrt{3}+4i(1+\sqrt{3})$

b/ Résoudre alors dans C l'équation : $z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$ et mettre les solutions sous forme algébrique

2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points $A;B$ et Ω d'affixes respectives $z_A=1-i$ $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_\Omega=2$

Soit ζ le cercle de centre Ω et de rayon 2

a/ Vérifier que $B\in\zeta$

b/ Placer les points A et Ω .Construire alors le point B

3-a/ Ecrire z_A sous forme exponentielle

b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire la forme exponentielle de z_B

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice № 04(4.5points)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0=3$, $b_0=1$ et pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n+3}{3}$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n+3}{3}$. On pose $u_n=a_n-b_n$

1) a/ Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n=2(\frac{1}{3})^n$

b/ En déduire la limite de (u_n)

2) On pose , pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{a_n+b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $v_n\geq 2$

b/ Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $v_{n+1}=v_n+\frac{2-v_n}{n+1}$.

c/ En déduire que (v_n) converge vers un réel $l\succ 0$

2) Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n , v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Bon courage